

ORSAY  
Série A  
N° d'ordre :  
483

AMPLIFICATION EN HYPERFREQUENCES PAR INTERACTION FAISCEAU-PLASMA

ARTICLE PRINCIPAL

recouvrant en partie la thèse de Doctorat ès-Sciences Physiques  
enregistrée au C.N.R.S. sous le numéro A.O. 3036.

par

PHAM-TU-MANH

Soutenue le 5 mai 1969 à la Faculté des Sciences d'ORSAY

devant le jury : MM. P. GRIVET, Président

J-L. DELCROIX  
A. SEPTIER  
G. MOURIER



# AMPLIFICATION PARAMÉTRIQUE EN HYPERFRÉQUENCES PAR INTERACTION FAISCEAU-PLASMA

par PHAM-TU-MANH (\*)

Institut d'Electronique Fondamentale, Laboratoire associé au C. N. R. S.  
Faculté des Sciences, Bâtiment 220, 91, Orsay, France

(Reçu le 23 septembre 1969)

**Résumé.** — Nous présentons une étude théorique de l'amplification paramétrique en hyperfréquences obtenue avec un système faisceau-plasma. Grâce aux propriétés non linéaires d'un tel milieu, une partie de l'énergie fournie à la fréquence  $F_p$  de la pompe est convertie en énergie à la fréquence  $F_s$  du signal à amplifier. Le modèle théorique choisi est celui d'un amplificateur paramétrique à interaction d'ondes, l'énergie de pompe étant véhiculée par le faisceau et le signal et l'« idler » (de fréquence  $F_i = F_p - F_s$ ) par le plasma. Une méthode de perturbation est utilisée pour calculer le taux de croissance du signal  $F_s$  et les résultats montrent qu'on peut obtenir des gains très élevés avec un tel amplificateur.

**Abstract.** — A theoretical study concerning UHF parametric amplification performed in a beam-plasma system is reported. Due to the nonlinear properties of such a medium, energy at pump frequency  $F_p$  can be converted into energy at frequency  $F_s$  of the signal to be amplified. The theoretical model is that of a travelling wave parametric amplifier, the pump wave being propagated by the beam, the signal and idler (frequency  $F_i = F_p - F_s$ ) waves by the plasma. A perturbation method is used to calculate the growth-rate of the signal wave  $F_s$  and the results show that very high gains can be expected from such an amplifier.

**1. Introduction.** — Le principe du couplage paramétrique est connu depuis longtemps, mais ce n'est que récemment qu'il a connu un réel développement avec l'utilisation de milieux tels que semi-conducteurs, ferrites, ou, à un degré moindre, faisceaux d'électrons. Par la suite, l'idée est venue d'exploiter les propriétés non linéaires d'un plasma pour réaliser l'amplification paramétrique [1]. Quelques tentatives expérimentales eurent lieu mais donnèrent des résultats peu encourageants [2]. Nous avons pour notre part réalisé un amplificateur paramétrique dans un système mixte faisceau-plasma et les résultats obtenus ont été publiés par ailleurs [3].

L'étude théorique présentée ici tente de donner une explication du mécanisme physique de l'amplification. Elle s'inspire dans ses grandes lignes d'un traitement utilisé dans la théorie des tubes hyperfréquences et reprise par Kino pour le cas d'un plasma seul [1]. L'amplificateur paramétrique considéré est du type non dégénéré, à constantes distribuées et à ondes progressives et emploie les propriétés non linéaires d'un milieu plasma-faisceau d'électrons.

**2. Modèle théorique. Hypothèses.** — Le système faisceau-plasma est considéré comme formant un

tout, possédant ses caractéristiques de dispersion et dans lequel sont injectés le signal à amplifier de fréquence  $F_s$  ainsi qu'une onde de haut niveau de puissance et de fréquence  $F_p$  (source de pompe). Dans le système se propagent alors trois ondes de fréquences  $F_p$ ,  $F_s$  et  $F_i = F_p - F_s$  (appelée « idler »), dont les champs agissent sur le mouvement des électrons du faisceau et du plasma pour donner naissance à un courant électronique. Ce courant dépend des trois fréquences à la fois et son expression comprend en particulier un terme du second ordre correspondant au couplage entre les trois ondes. Ce terme, qui est négligé dans un traitement linéaire, a, pour le signal et pour l'idler, une amplitude proportionnelle à celle du champ de pompe ; il peut donc être suffisamment important pour modifier leurs caractéristiques de propagation linéaire. Par son intermédiaire on calculera les nouvelles constantes de propagation du système et on en déduira le taux de croissance des différentes ondes.

Considérons les deux états suivants du système :

1) ETAT INITIAL DIT « NON PERTURBÉ ». — Si on injecte séparément dans le système l'une des trois ondes de fréquences respectives  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  ou  $\omega_3$ , elle se propage avec l'une des constantes de propagation non perturbées  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  ou  $\beta_3$  respectivement. Nous désignerons dans la suite par  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  les fréquences angulaires du signal, de l'idler et de la pompe respectivement. Les champs HF correspondants, sont  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  et  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ .

(\*) Cet article recouvre une partie de la thèse de Doctorat ès Sciences Physiques soutenue le 5 mai 1969 à la Faculté des Sciences d'Orsay, Université de Paris. La thèse est enregistrée au C. N. R. S. sous le numéro A 0 3036.

2) ETAT DIT « PERTURBÉ ». — Les trois ondes existent simultanément dans le système et vérifient la relation :

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3.$$

Dans les conditions où la relation supplémentaire

$$\beta_1 + \beta_2 \simeq \beta_3$$

est vérifiée, il peut y avoir couplage entre ces ondes, c'est-à-dire modification des constantes de propagation initiales, qui deviennent alors  $\beta_a$ ,  $\beta_b$ ,  $\beta_c$  respectivement. Nous supposons cependant que le niveau de la pompe est très grand par rapport à celui du signal amplifié, c'est-à-dire que la propagation de la pompe n'est pas perturbée par l'interaction. Nous avons donc :  $\beta_c = \beta_3$  ( $\beta_3$  réel).

Nous écrivons ensuite les équations habituelles auxquelles obéissent les électrons du système, en conservant tous les termes jusqu'au second ordre. La résolution de ces équations permet enfin d'exprimer la variation ( $\beta_a - \beta_1$ ) en fonction des grandeurs du système initial non perturbé.

Un tel problème traité dans sa généralité serait difficilement soluble, aussi sommes-nous amenés à faire certaines hypothèses simplificatrices :

a) Nous utilisons les hypothèses souvent introduites dans l'étude des plasmas en hyperfréquences, c'est-à-dire : plasma froid, sans collisions, ions immobiles.

b) Faisceau et plasma sont supposés homogènes, cylindriques, de même rayon et placés dans le vide.

c) Le champ magnétique statique de confinement  $B_0$  est supposé de valeur infinie, ce qui restreint le mouvement des électrons à la seule direction  $Oz$  de ce champ, qui est aussi la direction de déplacement du faisceau.

d) Nous supposons que le système non perturbé propage sans pertes ni amplification le signal et l'idler, c'est-à-dire qu'il est stable pour ces deux fréquences. Les constantes  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont donc réelles.

e) Toutes les grandeurs variables seront de la forme :

$$A_i(r, z, t) = A_{0i}(r) e^{j(\omega_i t - \beta_i z)}.$$

3. **Modes de propagation.** — Les trois ondes du signal, de l'idler et de la pompe sont supposées être purement progressives. Entre elles, existent les relations suivantes, dans le cas d'un système à symétrie de révolution :

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 \quad (1)$$

$$\beta_1 + \beta_2 \simeq \beta_3 \quad (2)$$

$$\beta_3 = \beta_a + \beta_b^* = \beta_a^* + \beta_b. \quad (3)$$

La relation (3) traduit deux résultats :

— d'une part, la croissance doit être la même pour le signal et pour l'idler :

$$\text{Im}(\beta_a) = \text{Im}(\beta_b);$$

— d'autre part, la pompe perturbe la propagation du signal et de l'idler de façon à imposer une condition de résonance entre les constantes de phase du système perturbé :

$$\beta_3 = \text{Re}(\beta_a) + \text{Re}(\beta_b).$$

Nous verrons par la suite que le calcul du gain impose la connaissance des constantes de propagation du système non perturbé, c'est-à-dire de la définition des modes de propagation pour les différentes ondes. Pour un amplificateur paramétrique à interaction d'ondes, ces modes doivent vérifier les relations (1) et (2) entre les fréquences et les constantes de phase du système initial. Quand les fréquences varient, les vitesses varient aussi et le gain total ainsi que la largeur de bande seront d'autant plus grands que les ondes resteront plus longtemps en quasi-résonance ; ceci est vérifié pour un milieu peu dispersif. Un tel milieu est représenté par exemple par un faisceau d'électrons peu dense où se propagent des ondes suivant un même mode de charge d'espace, ou par un plasma dans le début de sa courbe de dispersion correspondant aux basses fréquences. Dans ces deux cas, les trois ondes sont propagées par la même mode et la relation (2) est approximativement vérifiée. Cependant, la condition de faible dispersion n'est pas impérative et on peut imaginer des cas où les trois ondes seraient propagées par trois modes différents d'un même milieu ; ces cas hypothétiques, qui sont hautement dispersifs, ne donnent évidemment qu'une bande passante très réduite.

Dans notre système faisceau-plasma, où les deux composantes doivent intervenir, les mesures expérimentales [4] nous ont conduits à choisir le modèle suivant : l'onde de pompe est propagée par un mode de charge d'espace du faisceau, tandis que signal et idler sont propagés par un même mode de plasma. De plus, la pompe cédant de l'énergie au faisceau, excite dans celui-ci un mode rapide, tandis que le mode de plasma est un mode direct de la branche « basse » du diagramme de dispersion, étant données les valeurs des fréquences en jeu. Par ailleurs, l'excitation des ondes dans le plasma et dans le faisceau se faisant par l'intermédiaire d'un même coupleur, les modes excités présentent la même symétrie ; dans le cas de l'excitation par une hélice en particulier, les composantes  $E_z$  et  $H_z$  sont non nulles. Dans la suite, nous considérons le seul mode à symétrie de révolution pour le plasma et nous verrons que l'hypothèse d'un champ magnétique statique infini réduit le champ propagé par le faisceau à la seule composante longitudinale  $E_z$ .

Une fois les modes de propagation définis, il est ensuite aisé de trouver les  $\beta_i$  correspondants, et ceci sera fait plus loin.

4. **Calcul de la densité de courant.** — Nous allons maintenant montrer que, sous l'action d'une forte puissance de pompe, les termes habituellement négli-

gés en théorie linéaire deviennent ici prépondérants, et en particulier les termes au second ordre où interviennent la vitesse et la densité de courant.

a) EQUATION DU MOUVEMENT. — Le mouvement des électrons étant réduit à la seule direction  $Oz$  du champ magnétique statique  $B_0$ , supposé par ailleurs infini, nous avons à la fréquence  $\omega_i$  :

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial z} = \eta E_i \quad (\eta = e/m). \quad (4)$$

Ecrivons  $v_i$  sous la forme :

$$v_i = u_0 + v'_i + v''_i + \dots$$

$u_0$  désignant la partie continue de la vitesse,  $v'_i$  et  $v''_i$  les termes du premier et du second ordre en  $E_i$ . Portons dans (4) en ne gardant que les termes d'ordre égal ou inférieur à 2. En séparant les termes du premier et du second ordre :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v'_i}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v'_i}{\partial z} &= \eta E_i \end{aligned} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v''_i}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v''_i}{\partial z} + \sum_{j,k} v'_j \cdot \frac{\partial v'_k}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

La partie linéaire (5) donne :

$$\left\{ \begin{aligned} v'_i &= \eta E_{0i}(r) \frac{e^{-j\beta_i z}}{j(\omega_i - \beta_i u_0)} e^{j\omega_i t} \\ v''_i &= -\eta E_{0i}^*(r) \frac{e^{j\beta_i^* z}}{j(\omega_i - \beta_i^* u_0)} e^{-j\omega_i t}. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Remarquons ici que, en toute rigueur, la dérivation

$$\frac{\partial v'_i}{\partial z}$$

telle qu'elle est faite ci-dessus est inexacte, car elle suppose que  $v'_{0i}$  est indépendant de  $z$ , avec  $v'_{0i}$  défini par :

$$v'_i(r, z) = v'_{0i}(r, z) e^{-j\beta_i z}.$$

Cependant, comme  $v'_i$  est proportionnel à  $E_i$ , l'approximation faite revient à négliger  $\partial E_i(z)/\partial z$  devant

$$j\beta_i E_i(z),$$

ce qui est concevable si l'on suppose que les amplitudes des champs du signal et de l'idler sont lentement variables en  $z$ , ou encore que la variation du champ par longueur d'onde est faible devant la quantité

$$|\beta_i E_i(z)|.$$

La même remarque peut s'appliquer à la dérivation

$$\frac{\partial v''_i}{\partial z}$$

qui est effectuée plus loin.

La partie du second ordre (6) donne, à la fréquence  $\omega_1$  par exemple :

$$j\omega_{D1} v''_1 = - \sum_{j,k} v'_j \frac{\partial v'_k}{\partial z} \quad (8)$$

où nous avons posé :

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_{Di} &= \omega_i - \beta_i u_0 \\ \omega_{Di}^* &= \omega_i - \beta_i^* u_0. \end{aligned} \right.$$

Le second membre de (8) fait intervenir tous les termes dont le produit donne un terme à la fréquence  $\pm \omega_1$ , c'est-à-dire tous les termes de fréquence  $\pm \omega_2$  et  $\pm \omega_3$ . En ne considérant que les termes à la fréquence  $+\omega_1$  :

$$j\omega_{D1} v''_1 = - (v_2^* + v_3) \frac{\partial}{\partial z} (v_2^* + v_3)$$

$$= j(\beta_3 - \beta_b^*) v_2^* v'_3 = j\beta_a v_2^* v'_3$$

d'où :

$$v''_1(r, z, t) = \frac{\beta_a}{\omega_{D1}} v_2^*(r, z, t) v'_3(r, z, t). \quad (9)$$

En calculant de même le terme à la fréquence  $-\omega_2$  :

$$v_2^{''*}(r, z, t) = \frac{\beta_b^*}{\omega_{D2}^*} v'_1(r, z, t) v_3^*(r, z, t). \quad (10)$$

b) EQUATION DE CONTINUITÉ. — Séparons de même les densités de courant et de charge en partie continue et en partie variable :

$$\left\{ \begin{aligned} J_i &= J_{0i} + J'_i + J''_i + \dots \\ \rho_i &= \rho_0 + \rho'_i + \rho''_i + \dots \end{aligned} \right.$$

La partie variable de la densité de courant étant définie par :

$$\left\{ \begin{aligned} J'_i &= \rho_0 v'_i + \rho'_i u_0 \\ J''_i &= \rho_0 v''_i + \rho''_i u_0 + \sum_{j,k} \rho'_j v'_k. \end{aligned} \right.$$

L'équation de continuité s'écrit, en décomposant en termes du premier et du second ordre :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial J'_i}{\partial z} + \frac{\partial \rho'_i}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial J''_i}{\partial z} + \frac{\partial \rho''_i}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \right.$$

On obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} \rho'_i &= \rho_0 \frac{\beta_i}{\omega_{Di}} v'_i \\ \rho_0 \frac{\partial v''_i}{\partial z} + u_0 \frac{\partial \rho''_i}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} (\sum \rho_j v_k) + \frac{\partial \rho''_i}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

En calculant comme ci-dessus le terme correspondant à la fréquence  $+\omega_1$  :

$$j\omega_{D1} \rho_1'' = j\beta_a \rho_0 v_1'' - (\rho_2'^* + \rho_3') \frac{\partial}{\partial z} (v_2'^* + v_3') - (v_2'^* + v_3') \frac{\partial}{\partial z} (\rho_2'^* + \rho_3') .$$

Développons et remplaçons  $\rho_2'^*$  et  $\rho_3'$  par leurs valeurs tirées de (11) et  $v_1''$  par sa valeur donnée par (9) :

$$\rho_1'' = \rho_0 \frac{\beta_a}{\omega_{D1}} \left( \frac{\beta_a}{\omega_{D1}} + \frac{\beta_b^*}{\omega_{D2}^*} + \frac{\beta_3}{\omega_{D3}} \right) v_2'^* v_3' .$$

Nous pouvons maintenant calculer la composante  $J_1''$  à la fréquence  $\omega_1$  :

$$J_1'' = \rho_0 v_1'' + \rho_1'' u_0 + \rho_2'^* v_3' + \rho_3' v_2'^* .$$

En remplaçant les différentes grandeurs par leurs valeurs calculées précédemment :

$$\begin{cases} J_1'' = \eta^2 \rho_0 K_1 \frac{E_{0b}^* E_{03}}{\omega_{D2}^* \omega_{D3}} e^{-j\beta_a z} e^{j\omega_1 t} \\ K_1 = \frac{\omega_1}{\omega_{D1}} \left( \frac{\beta_a}{\omega_{D1}} + \frac{\beta_b^*}{\omega_{D2}^*} + \frac{\beta_3}{\omega_{D3}} \right) . \end{cases} \quad (12)$$

De la même façon on calcule le terme à la fréquence  $-\omega_2$  :

$$\begin{cases} J_2'^* = \eta^2 \rho_0 K_2^* \frac{E_{0a} E_{03}^*}{\omega_{D1} \omega_{D3}} e^{j\beta_b^* z} e^{-j\omega_2 t} \\ K_2^* = \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_{D1}}{\omega_{D2}} K_1 . \end{cases} \quad (13)$$

Les relations (12) et (13) montrent que le terme du second ordre de la densité de courant est proportionnel à l'amplitude du champ de pompe. Appliquons maintenant ces résultats au faisceau et au plasma, en affectant les grandeurs correspondantes des indices  $f$  et  $p$  respectivement. Posons :

$$\omega_p^2 = \eta \frac{\rho_{0p}}{\varepsilon_0}, \quad \omega_f^2 = \eta \frac{\rho_{0f}}{\varepsilon_0}$$

$u_0 = 0$  pour un plasma stationnaire,  $\omega_p$  et  $\omega_f$  désignant les fréquences angulaires de plasma du plasma et du faisceau. Le courant  $J''$  total sera la somme des courants  $J_f''$  et  $J_p''$  du faisceau et du plasma :

$$\begin{cases} J_1'' = J_{1f}'' + J_{1p}'' = \eta \varepsilon_0 C_1 E_{0b}^* E_{03} e^{-j\beta_a z} e^{j\omega_1 t} \\ J_2'^* = J_{2f}''^* + J_{2p}''^* = \eta \varepsilon_0 C_2^* E_{0a} \cdot E_{03} e^{j\beta_b^* z} e^{-j\omega_2 t} \end{cases} \quad (14)$$

avec  $C_1$  et  $C_2$  définis par :

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\omega_1 \omega_f^2}{\omega_{D1} \cdot \omega_{D2}^* \cdot \omega_{D3}} \left( \frac{\beta_a}{\omega_{D1}} + \frac{\beta_b^*}{\omega_{D2}^*} + \frac{\beta_3}{\omega_{D3}} \right) + \frac{\omega_p^2}{\omega_2 \omega_3} \left( \frac{\beta_a}{\omega_1} + \frac{\beta_b^*}{\omega_2} + \frac{\beta_3}{\omega_3} \right) \\ C_2^* = \frac{\omega_2 \cdot \omega_f^2}{\omega_{D1} \omega_{D2}^* \omega_{D3}} \left( \frac{\beta_a}{\omega_{D1}} + \frac{\beta_b^*}{\omega_{D2}^*} + \frac{\beta_3}{\omega_{D3}} \right) + \frac{\omega_p^2}{\omega_1 \omega_3} \left[ \frac{\beta_a}{\omega_1} + \frac{\beta_b^*}{\omega_2} + \frac{\beta_3}{\omega_3} \right] . \end{cases} \quad (15)$$

Les relations (14) et (15) donnent la valeur de la composante du second ordre  $J''$  de la densité de courant électronique dans le système faisceau-plasma, due au couplage entre les trois ondes. C'est cette composante qui, en perturbant la propagation dans le système, permettra le cas échéant d'obtenir l'amplification des champs du signal et de l'idler.

### 5. Constantes de propagation du système perturbé.

— Dans le système initial non perturbé les champs s'écrivent à la fréquence  $\omega_1$  par exemple :

$$\begin{cases} \bar{E}_1(r, z, t) = \bar{E}_{01}(r) \cdot e^{j(\omega_1 t - \beta_1 z)} \\ \bar{H}_1(r, z, t) = \bar{H}_{01}(r) \cdot e^{j(\omega_1 t - \beta_1 z)} . \end{cases}$$

Ces mêmes grandeurs deviennent, dans le système perturbé :

$$\begin{cases} \bar{E}_a(r, z, t) = \bar{E}_{0a}(r) \cdot e^{j(\omega_1 t - \beta_a z)} \\ \bar{H}_a(r, z, t) = \bar{H}_{0a}(r) \cdot e^{j(\omega_1 t - \beta_a z)} . \end{cases}$$

Ecrivons les équations de Maxwell dans les deux cas :

— Système non perturbé

$$\begin{cases} \text{rot } \bar{E}_1 = -j\omega_1 \mu_0 \bar{H}_1 \\ \text{rot } \bar{H}_1 = j\omega_1 \varepsilon_0 \varepsilon_r \bar{E}_1 \end{cases} \quad (16)$$

— Système perturbé

$$\begin{cases} \text{rot } \bar{E}_a = -j\omega_1 \mu_0 \bar{H}_a \\ \text{rot } \bar{H}_a = j\omega_1 \varepsilon_0 \varepsilon_r \bar{E}_a + \mathbf{J}_1'' . \end{cases} \quad (17)$$

Nous avons introduit ici la constante diélectrique relative  $\varepsilon_r$  du système faisceau-plasma considéré comme un ensemble. Sa valeur importe peu ici car elle sera éliminée dans la suite du calcul.

En combinant les quatre équations (16) et (17), en calculant le flux de puissance qui traverse une section de la colonne plasma-faisceau et en appliquant le théorème de la divergence nous obtenons, après un calcul que nous ne détaillerons pas ici (cf. par exemple réf. 4), la relation suivante :

$$\beta_a - \beta_1 = -j \times$$

$$\times \frac{\int_A (\bar{E}_{01}^* \cdot \bar{J}_{01}'') dA}{\int_A \{ (\bar{E}_{0a} \wedge \bar{H}_{01}^*) + (\bar{E}_{01}^* \wedge \bar{H}_{0a}) \} \cdot \bar{i}_z dA} \quad (18)$$

avec :

$$\begin{cases} A = \text{section de la colonne faisceau-plasma;} \\ \bar{i}_z = \text{vecteur unité de l'axe } Oz; \\ \bar{J}_1''(r, z, t) = \bar{J}_{01}''(r) \cdot e^{j(\omega_1 t - \beta_a z)} . \end{cases}$$

La relation (18) exprime la modification de la constante de propagation  $\beta_1$  du mode de fréquence  $\omega_1$ ,

provoquée par un courant  $\bar{J}_{01}''$  se propageant avec une constante de propagation égale à  $\beta_a$  à travers le système. Cette expression ne se prête cependant pas à un emploi commode, car elle fait intervenir des grandeurs inconnues appartenant au système perturbé,  $\bar{E}_{0a}$  et  $\bar{H}_{0a}$ . Remarquons aussi que les grandeurs intervenant au dénominateur de (18) sont toutes des composantes transverses des champs correspondants. Si l'on suppose maintenant que les champs perturbés et non perturbés ont la même distribution radiale, l'hypothèse des faibles perturbations permet d'écrire les relations approchées de proportionnalité suivantes :

$$\begin{cases} \bar{E}_{0a} \simeq M \bar{E}_{01} \\ \bar{H}_{0a} \simeq M \bar{H}_{01} \end{cases} \quad (19)$$

où  $M$  est une constante arbitraire. En portant dans (18), nous remarquons alors que l'intégrale figurant au dénominateur est égale à quatre fois l'expression de la puissance transportée par le mode non perturbé à la fréquence  $\omega_1$ . En désignant par  $P_1$  cette puissance :

$$\beta_a - \beta_1 = -j \frac{\int_A (\bar{E}_{01}^* \cdot \bar{J}_{01}'') dA}{4 M P_1} \quad (20)$$

En procédant de même à la fréquence  $\omega_2$ , on trouve :

$$\beta_b^* - \beta_2 = j \frac{\int_A (\bar{E}_{02} \cdot \bar{J}_{02}^*) dA}{4 N^* P_2} \quad (21)$$

avec :

$$\begin{cases} \bar{E}_{0b} \simeq N \bar{E}_{02} \\ \bar{H}_{0b} \simeq N \bar{H}_{02} \\ 4 P_2 = \int_A \{ (\bar{E}_{02} \wedge \bar{H}_{02}^*) + (\bar{E}_{02}^* \wedge \bar{H}_{02}) \} \cdot \bar{i}_z dA \end{cases}$$

Les relations (20) et (21) donnent les nouvelles constantes de propagation  $\beta_a$  et  $\beta_b$ , c'est-à-dire aussi le taux de croissance des ondes à la fréquence du signal et de l'idler. Les valeurs de  $J_{01}''$  et  $J_{02}''$  sont données par les expressions (14) et (15) calculées précédemment. Il reste maintenant à exprimer les flux de puissance  $P_1$  et  $P_2$  transportées par le milieu faisceau-plasma.

**6. Puissance transportée par le système faisceau-plasma.** — Les quantités  $P_1$  et  $P_2$  représentant les puissances totales transportées par le système aux fréquences  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , comprennent une partie en provenance du faisceau, une autre en provenance du plasma. Pour un plasma stationnaire, la puissance est d'origine purement électromagnétique. Pour un faisceau modulé, la puissance d'origine cinétique est au contraire prépondérante, celle d'origine électromagnétique étant négligeable ou même nulle dans l'hypothèse d'un faisceau illimité transversalement.

1) Nous avons fait le calcul de la puissance électromagnétique propagée par une colonne de plasma cylindrique de rayon  $a$ , placée dans le vide en présence d'un champ magnétique statique infini [4]. En ne considérant que le mode à symétrie de révolution, l'onde propagée sera une onde TM ayant pour seules composantes de champ :  $E_z$ ,  $E_r$ ,  $H_\theta$  avec  $E_z$  de la forme :

$$E_z = \hat{E} J_0(T r) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)}$$

L'écriture des équations de Maxwell et des conditions aux limites permet d'obtenir la relation de dispersion suivantes :

$$T a \frac{J_1(T a)}{J_0(T a)} = \beta_a \frac{K_1(\beta_a)}{K_0(\beta_a)} \quad (22)$$

avec

$$\begin{cases} T^2 = -\beta^2 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \\ \omega_p = \text{fréquence angulaire du plasma} \end{cases}$$

Le flux de puissance se définit par :

$$\begin{aligned} P_p &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_A (\bar{E} \wedge \bar{H}^*) \cdot d\bar{A} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^a E_{r1} H_{\theta 1}^* r dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_a^\infty E_{r2} H_{\theta 2}^* r dr d\theta \right\} \end{aligned}$$

Les indices 1 et 2 se rapportent respectivement au milieu intérieur ( $0 \leq r \leq a$ ) ou extérieur ( $r \geq a$ ) à la colonne. Le calcul de  $P_p$  à partir des valeurs de  $E_r$  et  $H_\theta$  donne, à la fréquence  $\omega_i$  ( $\omega_1$  ou  $\omega_2$ ) :

$$\begin{aligned} P_{pi} &= \frac{\pi a^2 \varepsilon_0 \omega_i}{2 \beta_i} \hat{E}_i^2 \left( \frac{T_i}{\beta_i} \right)^2 \left[ J_0^2(T_i a) + \right. \\ &\quad \left. + J_1^2(T_i a) - \frac{2}{T_i a} J_0(T_i a) \cdot J_1(T_i a) \right] + \\ &\quad + \left[ \frac{J_0(T_i a)}{K_0(\beta_i a)} \right]^2 \cdot \left[ K_0^2(\beta_i a) - K_1^2(\beta_i a) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\beta_i a} K_0(\beta_i a) \cdot K_1(\beta_i a) \right] \} \quad (23) \end{aligned}$$

2) La puissance totale transportée par un faisceau modulé s'écrit :

$$P_f = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_A [(\bar{E}_T \wedge \bar{H}_T^*) \cdot \bar{i}_z + \bar{V} \cdot \bar{J}^*] dA \right\}$$

la grandeur  $V$  représentant la tension cinétique correspondant à la modulation de vitesse  $v$ , est définie par :

$$V = \frac{m}{e} u_0 v$$

Le deuxième terme dans l'intégrale, représentant le flux de puissance cinétique, est en général beaucoup plus grand que le premier qui correspond au flux de puissance électromagnétique ; dans ce qui suit, nous négligerons ce dernier terme. En exprimant  $V$  et  $J$  en fonction de  $E$  :

$$P_{fi} = u_0 \frac{\omega_i \omega_f^2}{\omega_{Di}^3} \left\{ \int_A \frac{1}{2} \varepsilon_0 |E_{0i}|^2 dA \right\}.$$

Considérons un faisceau de même rayon  $a$  que la colonne de plasma et placé dans les mêmes conditions ; nous obtenons :

$$P_{fi} = \frac{\pi a^2 \varepsilon_0 u_0 \omega_i \omega_f^2}{2 \omega_{Di}^3} \hat{E}_i^2 [J_0^2(T_i a) + J_1^2(T_i a)].$$

3) En combinant (23) et (24) nous obtenons l'expression cherchée de la puissance totale transportée par le système-faisceau plasma à la fréquence  $\omega_i$  :

$$P_i = P_{pi} + P_{fi} \quad (i = 1, 2).$$

**7. Expression du gain.** — Dans les expressions (20) et (21), les quantités  $E_{01}$ ,  $E_{02}$ ,  $J_{01}$ ,  $J_{02}$  (qu'il ne faut pas confondre avec les fonctions de Bessel  $J_0$  et  $J_1$ ) ont été définies telles que :

$$\begin{cases} E_1(r, z, t) = \hat{E}_1 J_0(T_1 r) e^{j(\omega_1 t - \beta_1 z)} \\ J_1''(r, z, t) = J_{01}''(r) e^{j(\omega_1 t - \beta_1 z)}. \end{cases}$$

Nous déduisons de (14), en utilisant à nouveau l'approximation (19) :

$$\begin{cases} J_{01}'' = \eta \varepsilon_0 C_1 N^* E_{02} E_{03} \\ J_{02}''^* = \eta \varepsilon_0 C_2^* M E_{01} E_{03}. \end{cases}$$

Dans les équations ci-dessus, nous avons écrit :

$$E_{01}^* = E_{01}, \quad E_{02}^* = E_{02}$$

car la propagation est supposée se faire sans pertes dans le système non perturbé.

Les quantités sous le signe « intégrale » au numérateur de (20) et (21) peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \bar{E}_{01}^* \bar{J}_{01}'' = \eta \varepsilon_0 C_1 N^* \hat{E}_1 \hat{E}_2 \hat{E}_3 J_0(T_1 r) \times \\ \quad \times J_0(T_2 r) J_0(T_3 r) \\ \bar{E}_{02} \bar{J}_{02}''^* = \eta \varepsilon_0 C_2^* M \hat{E}_1 \hat{E}_2 \hat{E}_3 J_0(T_1 r) \times \\ \quad \times J_0(T_2 r) J_0(T_3 r). \end{cases}$$

Portons dans l'expression (20) :

$$\begin{aligned} \beta_a - \beta_1 &= -j\eta \varepsilon_0 C_1 \frac{N^* \hat{E}_1 \hat{E}_2 \hat{E}_3}{4 M P_1} \times \\ &\times \int_0^a J_0(T_1 r) J_0(T_2 r) J_0(T_3 r) r dr. \quad (25) \end{aligned}$$

Remarquons que le second membre de (25) dépend de  $\beta_a$  et  $\beta_b^*$  par l'intermédiaire de la quantité  $C_1$  (relation 15). Utilisons encore l'approximation des faibles perturbations qui nous permet de remplacer dans ce second membre  $\beta_a$  par  $\beta_1$  et  $\beta_b^*$  par  $\beta_2$ . Procédons de même pour (21)

$$\begin{aligned} \beta_b^* - \beta_2 &= j\eta \varepsilon_0 C_2^* \frac{M \hat{E}_1 \hat{E}_2 \hat{E}_3}{4 N^* P_2} \times \\ &\times \int_0^a J_0(T_1 r) J_0(T_2 r) J_0(T_3 r) r dr \quad (26) \end{aligned}$$

où le second membre, avec la même approximation que ci-dessus, ne dépend pas de  $\beta_a$  et  $\beta_b^*$ .

Faisons maintenant le produit de (25) par (26) et posons :

$$(\beta_a - \beta_1)(\beta_b^* - \beta_2) = H^2$$

en désignant par  $H^2$  le produit des seconds membres.

Pour tenir compte d'un défaut possible de synchronisme entre les trois ondes du système non perturbé, écrivons par ailleurs :

$$\beta_1 + \beta_2 = \beta_3 + \delta.$$

Avec la relation (3) nous obtenons :

$$(\beta_a - \beta_1)(\beta_a - \beta_1 + \delta) + H^2 = 0$$

où le terme  $H^2$  est indépendant de  $\beta_a$ . Les racines de cette équation du second degré en  $\beta_a$  sont :

$$\beta_a = \left( \beta_1 - \frac{\delta}{2} \right) \pm j \left\{ H^2 - \left( \frac{\delta}{2} \right)^2 \right\}^{1/2}.$$

Si la condition  $|H| > |\delta/2|$  est vérifiée, le système permet la propagation d'une onde croissante et d'une onde décroissante, ce qui signifie qu'un amplificateur paramétrique à propagation d'ondes peut donner un gain positif si on considère l'onde directe. Le taux d'amplification est égale à :

$$G = \left[ H^2 - \left( \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (27)$$

et il est maximum pour  $\delta = 0$ , condition de résonance :

$$G_{\max} = H.$$

Exprimons  $G_{\max}$  à l'aide de (25), (26) et des expressions trouvées pour  $P_1$  et  $P_2$  (relations 23 et 24) :

$$\begin{aligned} G_{\max} &= \frac{\eta}{a^2} \hat{E}_3 \left( \frac{C_1 C_2}{Q_1 Q_2} \cdot \frac{\beta_1 \beta_2}{\omega_1 \omega_2} \right)^{1/2} \times \\ &\times \left( \int_0^a J_0(T_1 r) J_0(T_2 r) J_0(T_3 r) r dr \right) \quad (28) \end{aligned}$$

avec :

$$C_1 = \frac{\omega_1 \omega_f^2}{\omega_{D1} \omega_{D2} \omega_{D3}} \left( \frac{\beta_1}{\omega_{D1}} + \frac{\beta_2}{\omega_{D2}} + \frac{\beta_3}{\omega_{D3}} \right) + \frac{\omega_p^2}{\omega_2 \omega_3} \left( \frac{\beta_1}{\omega_1} + \frac{\beta_2}{\omega_2} + \frac{\beta_3}{\omega_3} \right)$$

$$C_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1} C_1$$

$$Q_i = \left( \frac{T_i}{\beta_i} \right)^2 \left[ J_0^2(T_i a) + J_1^2(T_i a) - \frac{2}{T_i a} J_0(T_i a) J_1(T_i a) \right] + \left[ \frac{J_0(T_i a)}{K_0(\beta_i a)} \right]^2 \left[ K_0^2(\beta_i a) - K_1^2(\beta_i a) + \frac{2}{\beta_i a} K_0(\beta_i a) K_1(\beta_i a) \right] + \frac{\beta_i u_0 \omega_f^2}{\omega_{Di}} [J_0^2(T_i a) + J_1^2(T_i a)] \quad (i = 1, 2).$$

Un calcul analogue à la fréquence  $\omega_2$  donnera une expression identique pour le gain de l'idler.

**8. Résultats.** — Le calcul du gain, qui s'effectue par les relations (27) et (28), impose la connaissance des constantes de propagation  $\beta_i$  et  $T_i$  du système faisceau-plasma. Avec le modèle adopté ici et défini au paragraphe 3, nous avons pour l'onde de pompe :

$$\beta_3 = \frac{\omega_3 - \omega_f}{u_0}, \quad \text{d'où} \quad \omega_{D3} = \omega_3 - \beta_3 u_0 = \omega_f$$

et

$$T_3^2 = -\beta_3^2 \left\{ 1 - \frac{\omega_f^2}{(\omega_3 - \beta_3 u_0)^2} \right\} = 0$$

dans l'hypothèse d'un champ magnétique infini, il n'y a pas de propagation radiale dans un faisceau ; la seule composante de champ est  $E_z$ , dont l'amplitude est constante dans toute la section.

Pour le signal et l'idler, les  $\beta_i$  s'obtiennent à partir de la relation de dispersion (22) qui peut se réécrire :

$$D(\omega_i, \beta_i) = \beta_i - T_i \frac{J_1(T_i a) K_0(\beta_i a)}{J_0(T_i a) K_1(\beta_i a)} = 0 \quad (30)$$

avec :

$$T_i^2 = -\beta_i^2 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right).$$

A partir de (30) on peut tracer les courbes de dispersion du plasma pour différentes valeurs de  $\omega_p$ , puis déterminer les valeurs à donner à certains paramètres (vitesse du faisceau et fréquences) pour avoir synchronisme total, c'est-à-dire un gain maximum.

Les calculs numériques ont été faits à partir des relations (27) et (28) donnant le gain. De nombreux paramètres interviennent ici et parmi eux nous avons retenu les quatre plus importants :

- Fréquence de la pompe  $F_p$  ;
- Fréquence du signal  $F_s$  ;
- Fréquence plasma du plasma  $F_0$  ;
- Vitesse du faisceau  $u_0$ .

D'autres grandeurs ont été maintenues inchangées tout au long des calculs : le rayon  $a$  de la colonne de plasma-faisceau et l'amplitude  $E_3$  du champ de pompe, pris égaux respectivement à 3 mm et 500 V/m. Les figures 1 à 4 illustrent les résultats de ces calculs.

1. En fonction de la fréquence de pompe  $F_p$ , nous avons porté sur la figure 1 la variation du gain pour deux valeurs de la vitesse  $u_0$  du faisceau. La courbe présente une très forte résonance, laquelle ne se produit à  $F_p = 2 F_s$  que si la vitesse  $u_0$  a la valeur correspondant au synchronisme. Par exemple, pour une fréquence plasma  $F_0$  de 2,2 GHz, cette valeur est

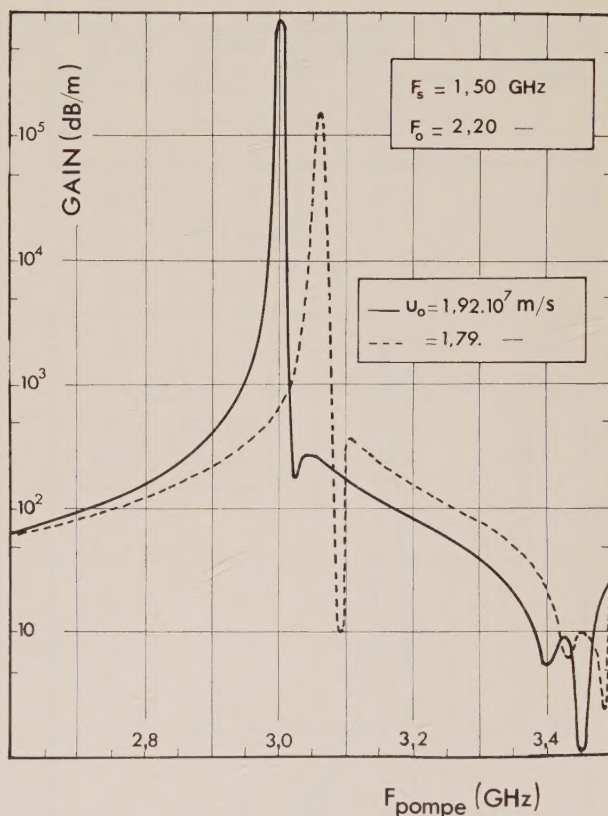


FIG. 1.

de  $u_0 = 1,92 \times 10^7$  m/s (courbe en trait plein). A  $F_0$  constant, le pic se déplace vers les fréquences supérieures ou inférieures à  $2 F_s$  selon que  $u_0$  est plus faible ou plus élevée que la valeur donnant le synchronisme (courbe en pointillés). Expérimentalement, si l'on connaît la valeur de  $u_0$  donnant le gain maximum pour  $F_p = 2 F_s$ , on peut en déduire la valeur de  $F_0$ , et ceci peut être une méthode indirecte de mesure de la fréquence de plasma.

2. En fonction de la fréquence du signal  $F_s$ , nous retrouvons le même caractère de résonance aiguë,

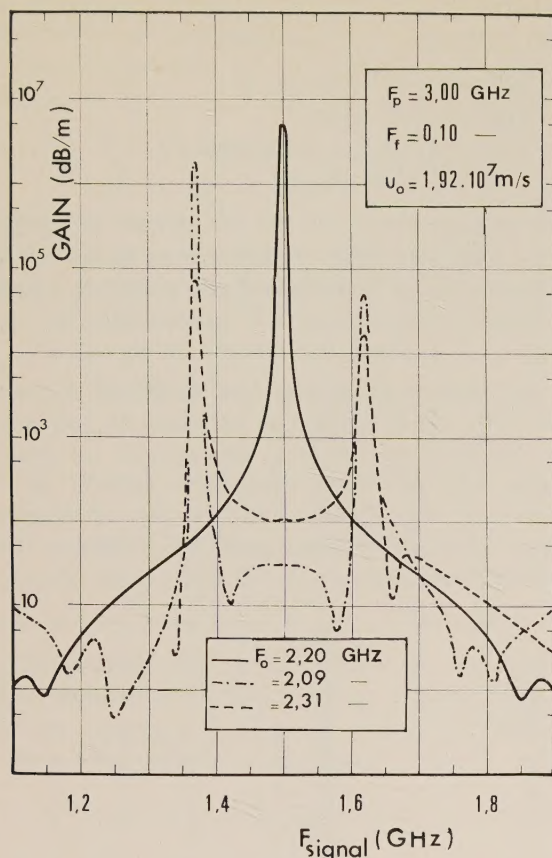


FIG. 2.

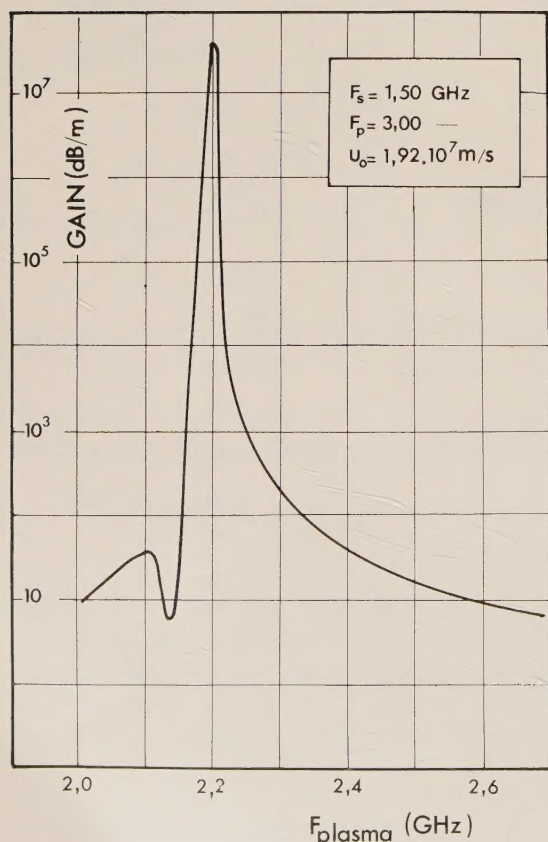


FIG. 3.

avec un gain maximum très élevé. Cependant la courbe présente maintenant la particularité d'être symétrique par rapport à la valeur  $F_s = \frac{1}{2} F_p$  due au rôle semblable des fréquences de signal et d'idler. Dans le but d'une confrontation ultérieure avec les résultats expérimentaux, nous avons voulu étudier l'effet sur le gain des fluctuations de paramètres tels que  $F_0$  ou  $u_0$ . La figure 2 illustre ainsi l'influence d'une variation de la fréquence de plasma  $F_0$  de 5 % de part et d'autre de la valeur donnant le synchronisme (courbes en pointillés et en traits discontinus). Pour chaque valeur de  $F_s$ , le gain varie alors entre ces deux valeurs extrêmes et le gain réel est la moyenne faite sur tous ces gains partiels. Les fluctuations de  $F_0$  ont donc pour effet de diminuer fortement le gain maximum à la résonance et d'augmenter la largeur de bande.

3. Les figures 3 et 4 montrent la variation du gain en fonction de la vitesse du faisceau et de la fréquence de plasma, et on y observe le même aspect caractéristique de résonance aiguë.

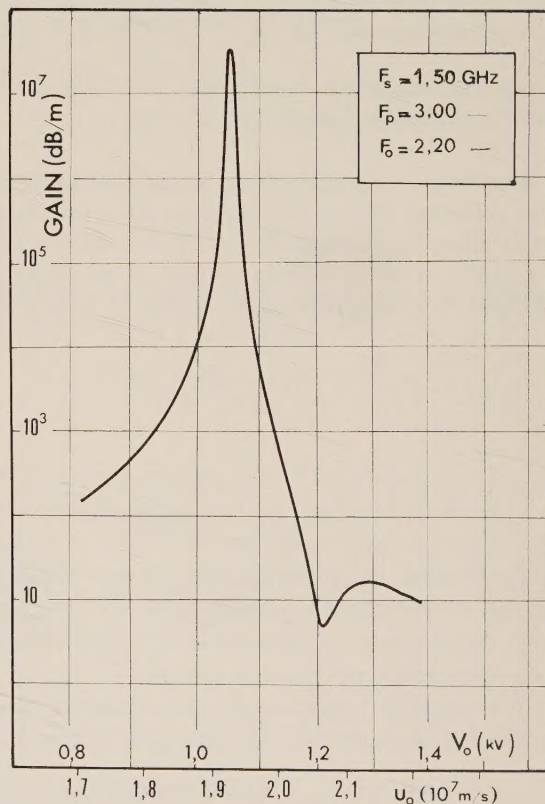


FIG. 4.

**9. Conclusion.** — Les résultats précédents montrent d'une part que les courbes de variation du gain présentent au synchronisme une résonance très prononcée, d'autre part que les gains maximums sont très élevés. Ce dernier point provient en partie des hypothèses de calcul que nous avons faites, et il est raisonnable de penser que le choix d'un modèle théorique plus proche du modèle physique aurait donné un gain plus faible. Par ailleurs, nous n'avons consi-

déré ici que le couplage entre les trois ondes de fréquences  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  et nous avons ignoré tous les modes de fréquences supérieures à  $\omega_3$ , tels que par exemple les modes à  $(\omega_3 + \omega_1)$  et  $(\omega_3 + \omega_2)$ ; ces modes sont couplés de façon passive au signal et contribuent à réduire fortement le gain sur ce dernier. L'aspect de résonance des courbes de gain, par contre, est caractéristique du mécanisme physique de l'amplification et doit par conséquent se retrouver dans les courbes expérimentales.

Si nous nous reportons aux travaux de l'équipe de Kino [1, 2] et qui se rapportent au cas d'un plasma

seul, nous voyons que les résultats obtenus ici sont meilleurs et ceci est vraisemblablement dû à l'introduction d'un faisceau : d'une part le synchronisme entre les trois ondes peut être réalisé de façon plus parfaite, d'autre part l'existence d'une vitesse d'ensemble du faisceau augmente la valeur des courants  $J_i''$  (relations 14, 15), c'est-à-dire augmente le gain.

Un travail expérimental a par ailleurs été réalisé [3] et a montré la réalité de l'amplification paramétrique par le système faisceau-plasma. Dans un article ultérieur, nous ferons la comparaison entre résultats expérimentaux et théoriques.

#### Bibliographie

- [1] KINO (G. S.), *J. Appl. Phys.*, 1960, **31**, 1449.
  - [2] LUDOVICI (B. F.), M. L. Report 900, Stanford University, 1962.
  - [3] PHAM-TU-MANH, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1966, **263**, 435.
  - [4] PHAM-TU-MANH, Thèse, Orsay, mai 1969.
-





